Une méthode de continuation guidée par la géométrie pour résoudre des systèmes de contraintes géométriques

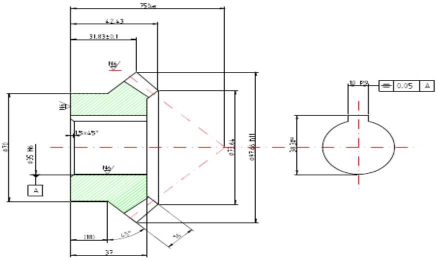
Rémi Imbach, Pascal Mathis et Pascal Schreck

Résolution de contraintes et modélisation

- Modélisation géométrique en CAO
    - déclarative : décrire un objet par les propriétés qu'il satisfait ;
    - impérative : exhiber cet objet ou une façon de le construire.
- Résolution de Contraintes Géométriques (RCG) :

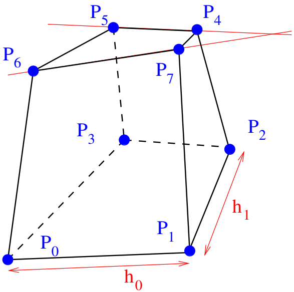
$$\text{Contraintes géométriques} \rightarrow \text{objet}$$

- Applications principales :
    - Chimie moléculaire
    - Robotique
    - CAO



Système de Contraintes Géométriques (SCG)

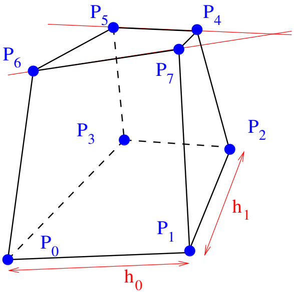
- Ensemble de primitives géométriques
  - points, droites, cercles, ...
  - variables sortées : *Point* : P_0, P_1,...
- Satisfaisant un ensemble de contraintes
  - distances, incidences, tangences...
  - termes : $h_0 = distance(P_0, P_1)$,...
- Saisi par l'intermédiaire d'une esquisse

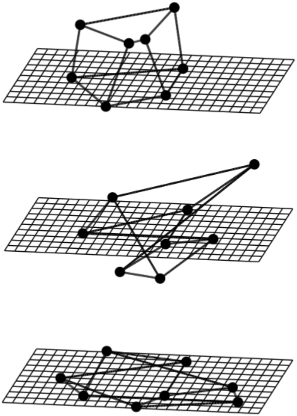


Inconnues :
Point : $P_0, P_1, \ldots, P_7$
Paramètres :
Longueurs : $h_0, h_1, \ldots$
Contraintes :
$h_0 = distance(P_0, P_1)$
$h_1 = distance(P_1, P_2)$
$\ldots$
$coplanaire(P_4, P_5, P_6, P_7)$
$\ldots$

Système de Contraintes Géométriques (SCG)

- Ensemble de primitives géométriques
  - points, droites, cercles, ...
  - variables sortées : *Point* : P_0, P_1,...
- Satisfaisant un ensemble de contraintes
  - distances, incidences, tangences...
  - termes : $h_0 = distance(P_0, P_1)$,...
- Saisi par l'intermédiaire d'une esquisse





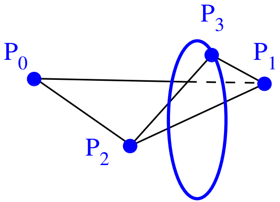
Problématique

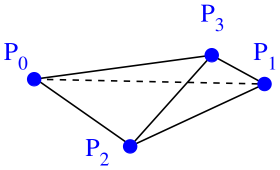
But : Explorer l'espace des solutions d'un SCG

- Quelle est sa structure ?
- Résolution formelle et exacte, ou numérique et approchée ?
- Chercher toutes les solutions, ou celles qui présentent un intérêt pour l'utilisateur ?

Structure de l'espace des solutions

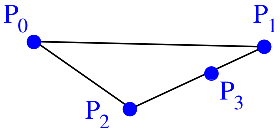
Rigidité : les solutions (modulo les déplacements) sont-elles des points isolés de l'espace des coordonnées ?

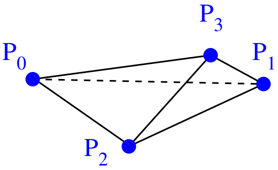




Structure de l'espace des solutions

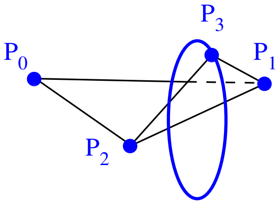
Rigidité : les solutions (modulo les déplacements) sont-elles des points isolés de l'espace des coordonnées ?

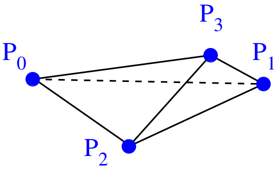




Structure de l'espace des solutions

Rigidité : les solutions (modulo les déplacements) sont-elles des points isolés de l'espace des coordonnées ?





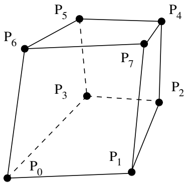
6 ddl (modulo déplacements)
5 ddr

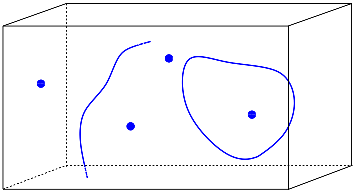
6 ddl (modulo déplacements)
6 ddr

Structure de l'espace des solutions

Rigidité : les solutions (modulo les déplacements) sont-elles des points isolés de l'espace des coordonnées ?

Et si les composantes connexes de l'ensemble des solutions sont hétérogènes en dimension ?





Problématique

But : Explorer l'espace des solutions d'un SCG

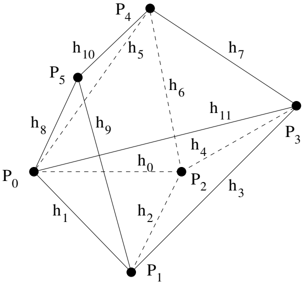
- Quelle est sa structure ?
- Résolution formelle et exacte, ou numérique et approchée ?
- Chercher toutes les solutions, ou celles qui présentent un intérêt pour l'utilisateur ?

Résolution

Recherche de solutions isolées de SCG supposés rigides

Approches formelles : spécialités strasbourgeoises

- Systèmes à base de connaissances



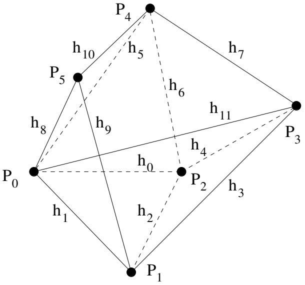
Paramètres :
$P_0, Pl_0, L_0, h_0, h_1, \dots, h_{11}$
Inconnues :
$P_1, P_2, \dots, P_5, S_0, \dots, S_{11}$
Termes :
$S_0 = sphere(P_0, h_0)$
$P_2 = interPLS(Pl_0, L_0, S_0)$
$S_1 = sphere(P_0, h_1)$
$S_2 = sphere(P_2, h_2)$
$P_1 = interPSS(Pl_0, S_1, S_2)$
...
$S_9 = sphere(P_0, h_8)$
$S_{10} = sphere(P_1, h_9)$
$S_{11} = sphere(P_4, h_{10})$
$P_5 = interSSS(S_9, S_{10}, S_{11})$

Résolution

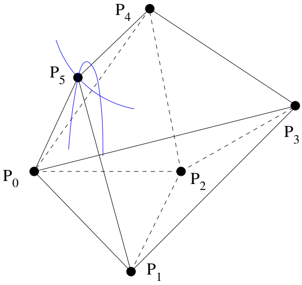
Recherche de solutions isolées de SCG supposés rigides

Approches formelles : spécialités strasbourgeoises

- Systèmes à base de connaissances
  Locus Intersection Method (LIM)



Paramètres :
$P_0, Pl_0, L_0, h_0, h_1, \ldots, h_{11}$
Inconnues :
$P_1, P_2, \ldots, P_5, S_0, \ldots, S_{11}$
Termes :
$S_0 = sphere(P_0, h_0)$
$P_2 = interPLS(Pl_0, L_0, S_0)$
$S_1 = sphere(P_0, h_1)$
$S_2 = sphere(P_2, h_2)$
$P_1 = interPSS(Pl_0, S_1, S_2)$
$\ldots$
$S_9 = sphere(P_0, h_8)$
$S_{10} = sphere(P_1, h_9)$
$S_{11} = sphere(P_4, h_{10})$
$P_5 = interSSS(S_9, S_{10}, S_{11})$

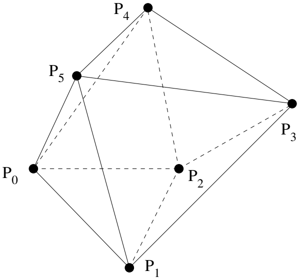


Résolution

Recherche de solutions isolées de SCG supposés rigides

Approches formelles : spécialités strasbourgeoises

- Systèmes à base de connaissances
  Locus Intersection Method (LIM)

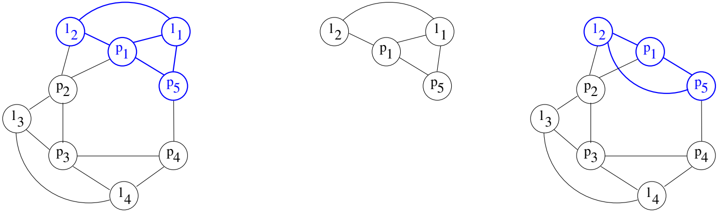


Résolution

Recherche de solutions isolées de SCG supposés rigides

Approches formelles : spécialités strasbourgeoises

- Systèmes à base de connaissances
- Décomposition



Résolution

Recherche de solutions isolées de SCG supposés rigides

Résolution numérique

- Construction d'une fonction numérique qui s'annule en les solutions

Inconnues :
Point $P_0, \dots, P_7$
Contraintes :
$h_0 = distance(P_0, P_1)$
$h_1 = distance(P_1, P_2)$
$\dots$
$coplanaire(P_0, P_1, P_2, P_3)$
$\dots$
$coplanaire(P_4, P_5, P_6, P_7)$

$$F : \mathbb{R}^{18} \to \mathbb{R}^{18}$$
$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \dots \\ x_{17} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \|\overrightarrow{P_0P_1}\| - h_0 \\ \|\overrightarrow{P_1P_2}\| - h_1 \\ \dots \\ det(\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}) \\ \dots \\ det(\overrightarrow{P_4P_5}, \overrightarrow{P_4P_6}, \overrightarrow{P_4P_7}) \end{pmatrix}$$

Résolution

Recherche de solutions isolées de SCG supposés rigides

Résolution numérique

- Construction d'une fonction numérique qui s'annule en les solutions pour un jeu de paramètres

Inconnues :
Point $P_0, \ldots, P_7$
Contraintes :
$h_0 = distance(P_0, P_1)$
$h_1 = distance(P_1, P_2)$
...
$coplanaire(P_0, P_1, P_2, P_3)$
...
$coplanaire(P_4, P_5, P_6, P_7)$

$$F : \mathbb{R}^{18} \times \mathbb{R}^{12} \to \mathbb{R}^{18}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \ldots \\ x_{17} \\ h_0 \\ \ldots \\ h_{11} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \|\overrightarrow{P_0P_1}\| - h_0 \\ \|\overrightarrow{P_1P_2}\| - h_1 \\ \ldots \\ det(\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}) \\ \ldots \\ det(\overrightarrow{P_4P_5}, \overrightarrow{P_4P_6}, \overrightarrow{P_4P_7}) \end{pmatrix}$$

Résolution

Recherche de solutions isolées de SCG supposés rigides

Résolution numérique

- Construction d'une fonction numérique qui s'annule en les solutions pour un jeu de paramètres
- Recherche exhaustive des solutions :
  méthodes par intervalles, homotopie
- Recherche d'une seule solution :
  Newton-Raphson, continuation de l'esquisse, optimisation

Problématique

But : Explorer l'espace des solutions d'un SCG

- Quelle est sa structure ?
- Résolution formelle et exacte, ou numérique et approchée ?
- Chercher toutes les solutions, ou celles qui présentent un intérêt pour l'utilisateur ?

Problématique

But : Explorer l'espace des solutions d'un SCG

- Quelle est sa structure ?
- Résolution formelle et exacte, ou numérique et approchée ?
- Chercher toutes les solutions, ou celles qui présentent un intérêt pour l'utilisateur ?

Moyen : Exploiter le contexte géométrique pour guider la résolution numérique par homotopie :

- Plusieurs solutions, proches de l'esquisse
- Robustesse aux ensembles de solutions hétérogènes en dimension
- Résolution hybride

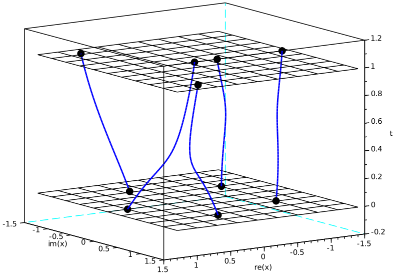
Méthode par homotopie

Idée principale : Déformation continue

- d'un système initial $F_0(x) = 0$ (solutions connues)
- en un système cible $F(x) = 0$ (solutions cherchées)

via une fonction d'homotopie $H : \mathbb{C}^n \times [0, 1] \to \mathbb{C}^n$

Exemple :
Système cible :
$$x^5 + 3x^2 + x = 0$$
Système initial :
$$\gamma\ (x^5 - 1) = 0, \gamma \in \mathbb{C}$$
Fonction d'homotopie :
$$H(x, t) = (1 - t)F_0(x) + tF(x)$$

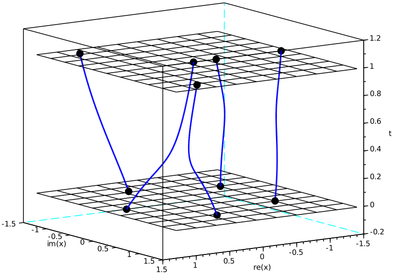


Méthode par homotopie

Résultat central :

Si H est régulière, les composantes connexes de l'ensemble $\{(x,t) \in \mathbb{C}^n \times [0,1] | H(x,t) = 0\}$ sont des variétés différentielles de dimension 1 : les chemins d'homotopie.

Cette caractérisation permet d'explorer les chemins d'homotopie grâce à une méthode de suivi de courbes.

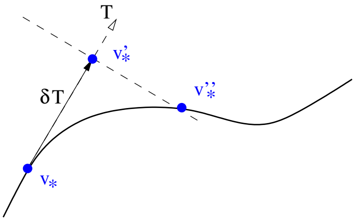


Méthode par homotopie

Suivi d'un chemin défini par $\mathcal{S} = \{v \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} | H(v) = 0\}$

Prédiction-correction

- v_* tq $H(v_*) = 0$
- Prédire v'_* le long de la tangente T de $\mathcal{S}$ en v_* :
  $v'_* = v_* + \delta T, \delta \in \mathbb{R}$
- Corriger v'_* en $v''_* \in \mathcal{S}$ grâce à Newton-Raphson
  ajout d'une équation garantissant la progression sur $\mathcal{S}$



Méthode par homotopie

Résultat central :

Si H est régulière, les composantes connexes de l'ensemble $\{(x,t) \in \mathbb{C}^n \times [0,1] | H(x,t) = 0\}$ *sont des variétés différentielles de dimension 1 : les chemins d'homotopie.*

Exemple :

Système cible :

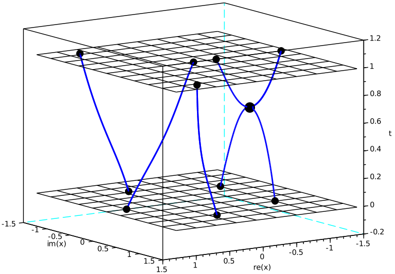
$$x^5 + 3x^2 + x = 0$$

Système initial :

$$(x^5 - 1) = 0$$

Fonction d'homotopie :

$$H(x,t) = (1-t)F_0(x) + tF(x)$$



Méthode par homotopie

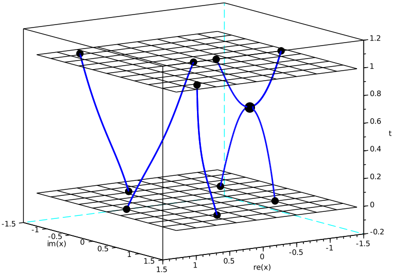
Résultat central :

Si H est régulière, les composantes connexes de l'ensemble $\{(x,t) \in \mathbb{C}^n \times [0,1] | H(x,t) = 0\}$ *sont des variétés différentielles de dimension 1 : les chemins d'homotopie.*

Point critique : (x, t) point en lequel $J_{(x,t)}H$ n'est pas de rang plein.

Valeur critique : $y = H(x, t)$ où (x, t) est un point critique.

H régulière : 0 n'est pas une valeur critique



Méthode par homotopie

Résultat central :

Si chaque composante de $F_0 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dépend d'un paramètre complexe, pour presque toutes les valeurs de ces paramètres, H est régulière sur $\mathbb{C}^n \times [0, 1[$.

gamma-trick
chemins strictement croissants en t

Exemple :
Système cible :

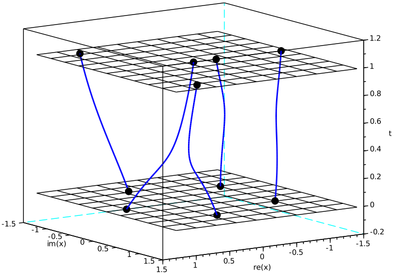
$$x^5 + 3x^2 + x = 0$$

Système initial :

$$\gamma\ (x^5 - 1) = 0, \gamma \in \mathbb{C}$$

Fonction d'homotopie :

$$H(x, t) = (1 - t)F_0(x) + tF(x)$$



Méthode par homotopie

Sur-estimation du nombre de zéros de F :

- plusieurs chemins pour une solution
- chemins de longueur infinie
  - tendent vers un zéro de $lim_{t \to 1} H(x,t)$
  - temps de suivi infini
  - peuvent se détecter dans $\mathbb{P}^n$

Exemple :

Système cible :

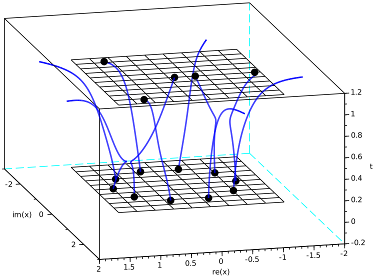
$$x^5 + 3x^2 + x = 0$$

Système initial :

$$\gamma(x^{10} - 1) = 0, \gamma \in \mathbb{C}$$

Fonction d'homotopie :

$$H(x,t) = (1-t)F_0(x) + tF(x)$$



Application à la résolution de SCG

Du SCG à la fonction d'homotopie :

système cible : utilisation de la fonction numérique associée

Avantage :

toutes les solutions isolées sont trouvées

Inconvénients :

- nombre de zéros de H très surestimé
- les solutions complexes sont-elles intéressantes ?

$\Rightarrow$ méthode très coûteuse

[DH00] C. Durand and C.M. Hoffmann.
A systematic framework for solving geometric constraints analytically.
Journal of Symbolic Computation, 30(5) :493–519, 2000.

Homotopie depuis l'esquisse

Du SCG à la fonction d'homotopie : Esquisse : $x_{sk} \in \mathbb{R}^n$
Paramètres : a_{sk} lus sur l'esquisse
a_{so} demandés par l'utilisateur
Fonction d'homotopie : $F(x, (1-t)a_{sk} + ta_{so})$

Avantages :

- solution trouvée semblable à l'esquisse
- suivi d'un seul chemin très rapide

Inconvénients :

- une seule solution trouvée
- chemin suivi dans $\mathbb{R}^n \times [0,1]$

[LM95] Hervé Lamure and Dominique Michelucci.
Solving geometric constraints by homotopy.
pages 263–269, 1995.

Méthode par homotopie

Suivi des chemins dans $\mathbb{R}^n \times [0,1]$:

- gamma-trick non valable
- chemins non nécessairement croissants en t
- continuation des solutions non assurée

Exemple :

Système cible :

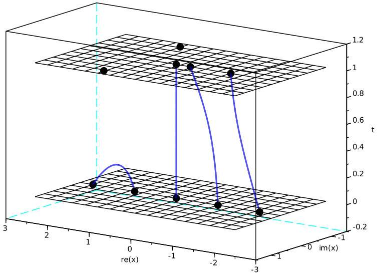
$$x^5 + 3x^2 + x = 0$$

Système initial :

$$(x-3)(x-2)\dots(x+2) = 0$$

Fonction d'homotopie :

$$H(x,t) = (1-t)F_0(x) + tF(x)$$

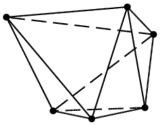


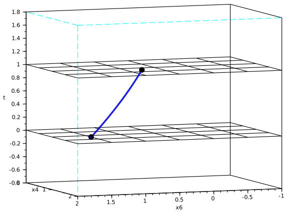
Considérer le chemin d'homotopie dans $\mathbb{R}^n \times [0,1]$

$(x,t) \in \mathcal{S}$, $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^n \times [0,1]$ chemin d'homotopie de H

- solution pour les paramètres $(1-t)a_{sk} + ta_{so}$
- seules les solutions réelles sont trouvées

Inconnues :
point $P_0, \dots, P_5$
Paramètres :
longueur $h_0, \dots, h_{11}$
Contraintes :
distance$(P_0, P_1) = h_0$
...
distance$(P_3, P_5) = h_{11}$





Considérer le chemin d'homotopie dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

$(x, t) \in \mathcal{S}$, $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ chemin d'homotopie de H

- solution pour les paramètres $(1 - t)a_{sk} + ta_{so}$
- seules les solutions réelles sont trouvées
- plusieurs solutions trouvées (parfois toutes)

Inconnues :
point $P_0, \ldots, P_5$
Paramètres :
longueur $h_0, \ldots, h_{11}$
Contraintes :
$distance(P_0, P_1) = h_0$
...
$distance(P_3, P_5) = h_{11}$

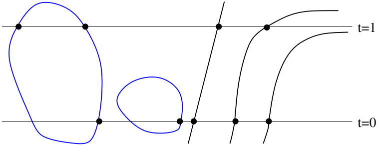
Considérer le chemin d'homotopie dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

$(x, t) \in \mathcal{S}$, $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ chemin d'homotopie de H

- solution pour les paramètres $(1-t)a_{sk} + ta_{so}$
- seules les solutions réelles sont trouvées
- plusieurs solutions trouvées (parfois toutes)

Si H est régulière ses chemins d'homotopie, dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, sont difféomorphes :

- à un cercle
  $\Rightarrow$ plusieurs solutions
  $\Rightarrow$ critère d'arrêt
- à une droite
  $\Rightarrow$ suivi infini



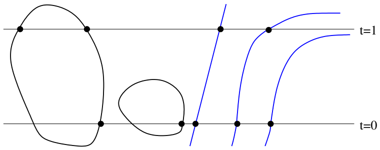
Considérer le chemin d'homotopie dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

$(x, t) \in \mathcal{S}$, $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ chemin d'homotopie de H

- solution pour les paramètres $(1-t)a_{sk} + ta_{so}$
- seules les solutions réelles sont trouvées
- plusieurs solutions trouvées (parfois toutes)

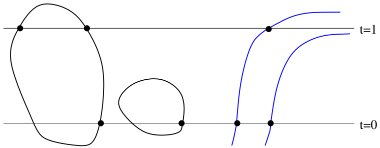
Si H est régulière ses chemins d'homotopie, dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, sont difféomorphes :

- à un cercle
  $\Rightarrow$ plusieurs solutions
  $\Rightarrow$ critère d'arrêt
- à une droite
  $\Rightarrow$ suivi infini



Nos contributions

- Interpolation non linéaire de a_{sk} en a_{so} :
  les chemins difféomorphes à des droites tendent vers des solutions à l'infini



[ISM14] Rémi Imbach, Pascal Schreck, and Pascal Mathis.
Leading a continuation method by geometry for solving geometric constraints.
Computer-Aided Design, 46 :138–147, 2014.

Nos contributions

- Interpolation non linéaire de a_{sk} en a_{so} :
  les chemins difféomorphes à des droites tendent vers des solutions à l'infini
- Les solutions à l'infini présentent des configurations géométriques particulières :
  arrêt du suivi dès leur détection

[ISM14] Rémi Imbach, Pascal Schreck, and Pascal Mathis.
Leading a continuation method by geometry for solving geometric constraints.
Computer-Aided Design, 46 :138–147, 2014.

Nos contributions

- Interpolation non linéaire de a_{sk} en a_{so} :
  les chemins difféomorphes à des droites tendent vers des solutions à l'infini
- Les solutions à l'infini présentent des configurations géométriques particulières :
  arrêt du suivi dès leur détection
- Des irrégularités inévitables sont dues à la satisfaction de théorèmes de géométrie d'incidence :
  ajout de paramètres aux contraintes d'incidence pour les éviter presque sûrement.

[ISM14] Rémi Imbach, Pascal Schreck, and Pascal Mathis.
Leading a continuation method by geometry for solving geometric constraints.
Computer-Aided Design, 46 :138–147, 2014.

Quelques résultats comparatifs

Comparaison avec logiciel libre `HOM4PS-2.0` :

- Détection des chemins à l'infini
- Homotopie polyédrale pour réduire le nombre de chemins

Table : Temps d'exécution [1].

	`HOM4PS-2.0` :	chemin de l'esquisse :
Disulfide :		
nb solutions	18	8
temps	6129s	3s
Hexaèdre :		
nb solutions	16 (0)	7 (3)
temps	12800s	1.6s
Icosaèdre :		
nb solutions	- [2]	28
temps	-	7.1s

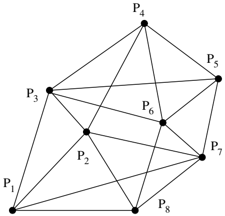
1. sur `Intel(R) Core(TM) i5 CPU 750 @ 2.67GHz`
2. calcul interrompu après une semaine

Quelques résultats comparatifs

Comparaison avec logiciel libre `HOM4PS-2.0` :

- Détection des chemins à l'infini
- Homotopie polyédrale pour réduire le nombre de chemins

Table : Temps d'exécution [1].



	`HOM4PS-2.0` :	chemin de l'esquisse :
Disulfide :		
nb solutions	18	8
temps	6129s	3s
Hexaèdre :		
nb solutions	16 (0)	7 (3)
temps	12800s	1.6s
Icosaèdre :		
nb solutions	- [2]	28
temps	-	7.1s

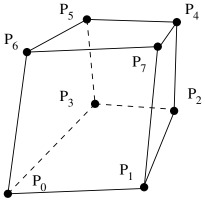
1. sur `Intel(R) Core(TM) i5 CPU 750 @ 2.67GHz`
2. calcul interrompu après une semaine

Quelques résultats comparatifs

Comparaison avec logiciel libre `HOM4PS-2.0` :

- Détection des chemins à l'infini
- Homotopie polyédrale pour réduire le nombre de chemins

Table : Temps d'exécution [1].



	`HOM4PS-2.0` :	chemin de l'esquisse :
Disulfide :		
nb solutions	18	8
temps	6129s	3s
Hexaèdre :		
nb solutions	16 (0)	7 (3)
temps	12800s	1.6s
Icosaèdre :		
nb solutions	- [2]	28
temps	-	7.1s

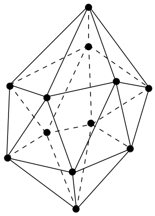
1. sur `Intel(R) Core(TM) i5 CPU 750 @ 2.67GHz`
2. calcul interrompu après une semaine

Quelques résultats comparatifs

Comparaison avec logiciel libre HOM4PS-2.0 :

- Détection des chemins à l'infini
- Homotopie polyédrale pour réduire le nombre de chemins

Table : Temps d'exécution [1].



	HOM4PS-2.0 :	chemin de l'esquisse :
Disulfide :		
nb solutions	18	8
temps	6129s	3s
Hexaèdre :		
nb solutions	16 (0)	7 (3)
temps	12800s	1.6s
Icosaèdre :		
nb solutions	- [2]	28
temps	-	7.1s

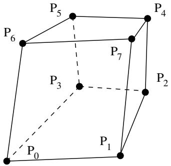
1. sur Intel(R) Core(TM) i5 CPU 750 @ 2.67GHz
2. calcul interrompu après une semaine

Exemple : l'hexaèdre

Problème 1 : *Construire un hexaèdre, en connaissant les longueurs de ses* 12 *arêtes.*

Pour presque toutes les valeurs des paramètres, ses solutions sont :

- des points isolés



SCG 3D :

Inconnues :	
8 points	18 ddl
Contraintes :	
12 distances 6 coplanarités	18 ddr

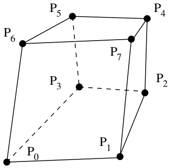
Exemple : l'hexaèdre

Problème 1 : *Construire un hexaèdre, en connaissant les longueurs de ses* 12 *arêtes.*

Pour presque toutes les valeurs des paramètres, ses solutions sont :

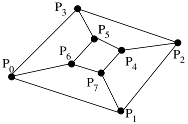
- des points isolés
- les solutions du problème 2

Problème 2 : *Construire* 8 *points dans un plan, en connaissant* 12 *distances entre paires de points.*



SCG 3D :

Inconnues :
8 points 18 ddl
Contraintes :
12 distances
6 coplanarités 18 ddr



SCG 2D :

Inconnues :
8 points 13 ddl
Contraintes :
12 distances 12 ddr

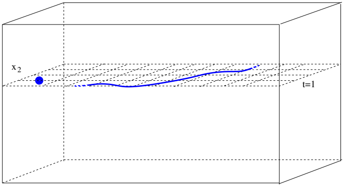
Exemple : l'hexaèdre

Problème 1 : *Construire un hexaèdre, en connaissant les longueurs de ses* 12 *arêtes.*

Pour presque toutes les valeurs des paramètres, ses solutions sont :

- des points isolés
- des variétés de dimension 1

Problème 2 : *Construire* 8 *points dans un plan, en connaissant* 12 *distances entre paires de points.*



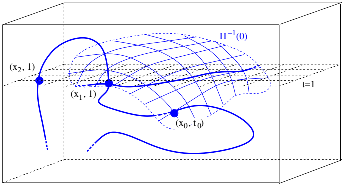
Exemple : l'hexaèdre

Problème 1 : *Construire un hexaèdre, en connaissant les longueurs de ses* 12 *arêtes.*

Pour presque toutes les valeurs des paramètres, ses solutions sont :

- des points isolés
- des variétés de dimension 1

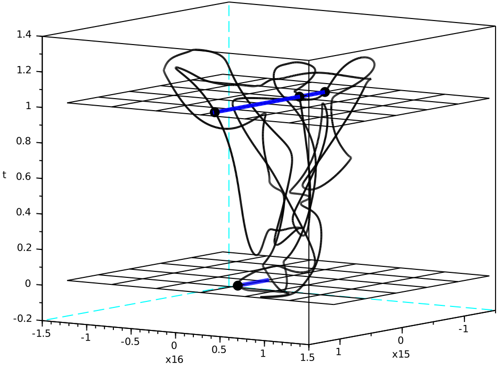
Fonction d'homotopie $H(X, t)$: Pour presque toutes les valeurs des paramètres, $\{(X, t) | H(X, t) = 0\}$ contient des points critiques



Paramétrer les contraintes booléennes

Idée :

Remplacer les contraintes de coplanarité par des contraintes de volume non-nuls quand $t \notin [\![0, 1]\!]$



Paramétrer les contraintes booléennes

Idée :

Remplacer les contraintes booléennes par des contraintes de paramètres non-nuls quand $t \notin [\![0, 1]\!]$

Théorème :

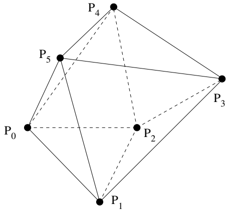
Soit un SCG génériquement rigide, $F(X, A)$ sa fonction numérique. Si pour tout i, f_i dépend d'un paramètre $a_i \in \mathbb{R}$, alors $F(X, d(t))$ est régulière pour presque tous $a_{sk} \in \mathbb{R}^n, a_{so} \in \mathbb{R}^n$.

Tiré et adapté de :

[LW93] TY Li and Xiao Shen Wang.
Solving real polynomial systems with real homotopies.
mathematics of computation, 60(202) :669–680, 1993.

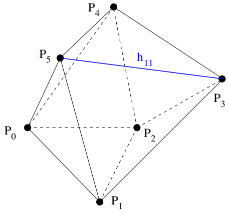
Reparamétrisation

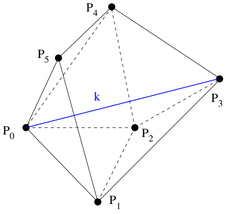
- Echec de la méthode LIM



Reparamétrisation

- Echec de la méthode LIM
- Remplacer d contraintes pour obtenir un SCG soluble par LIM
  $k = (k_0, \ldots, k_{d-1})$: paramètres guides

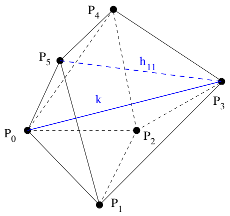




Reparamétrisation

Phase symbolique :

- Echec de la méthode LIM
- Remplacer d contraintes pour obtenir un SCG soluble par LIM
  $k = (k_0, \ldots, k_{d-1})$: paramètres guides
- Plan de construction paramétré k

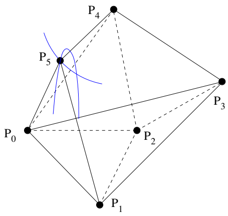


Paramètres :
$P_0, Pl_0, L_0, h_0, h_1, \ldots, k$
Inconnues :
$P_1, P_2, \ldots, P_5, S_0, \ldots, S_{11}$
Termes :
$S_0 = sphere(P_0, h_0)$
$P_2 = interPLS(Pl_0, L_0, S_0)$
...
$S_3 = sphere(P_0, k)$
$S_4 = sphere(P_1, h_3)$
$S_5 = sphere(P_2, h_4)$
$P_3 = interSSS(S_3, S_4, S_5)$
...
$P_5 = interSSS(S_9, S_{10}, S_{11})$

Reparamétrisation

Phase symbolique :

- Echec de la méthode LIM
- Remplacer d contraintes pour obtenir un SCG soluble par LIM
  $k = (k_0, \ldots, k_{d-1})$: paramètres guides
- Plan de construction paramétré k

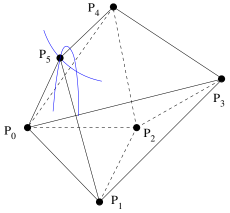


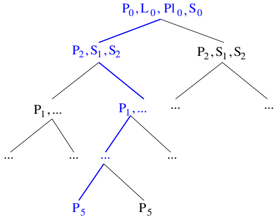
Paramètres :
$P_0, Pl_0, L_0, h_0, h_1, \ldots, k$
Inconnues :
$P_1, P_2, \ldots, P_5, S_0, \ldots, S_{11}$
Termes :
$S_0 = sphere(P_0, h_0)$
$P_2 = interPLS(Pl_0, L_0, S_0)$
...
$S_3 = sphere(P_0, k)$
$S_4 = sphere(P_1, h_3)$
$S_5 = sphere(P_2, h_4)$
$P_3 = interSSS(S_3, S_4, S_5)$
...
$P_5 = interSSS(S_9, S_{10}, S_{11})$

Reparamétrisation

Phase symbolique :

- Echec de la méthode LIM
- Remplacer d contraintes pour obtenir un SCG soluble par LIM
  $k = (k_0, \ldots, k_{d-1})$: paramètres guides
- Plan de construction paramétré k

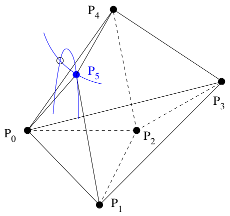


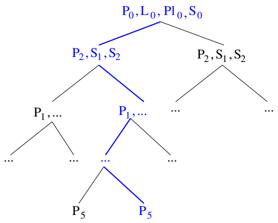


Reparamétrisation

Phase symbolique :

- Echec de la méthode LIM
- Remplacer d contraintes pour obtenir un SCG soluble par LIM
  $k = (k_0, \ldots, k_{d-1})$: paramètres guides
- Plan de construction paramétré k

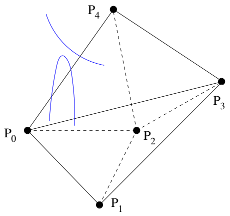


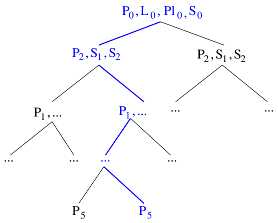


Reparamétrisation

Phase symbolique :

- Echec de la méthode LIM
- Remplacer d contraintes pour obtenir un SCG soluble par LIM
  $k = (k_0, \ldots, k_{d-1})$: paramètres guides
- Plan de construction paramétré k





Reparamétrisation

Phase numérique :

Pour quelles valeurs de k les contraintes supprimées sont-elles satisfaites par $Cp^b(k)$?

- fonction numérique : $F_r : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$
$$k \mapsto F_s(Cp^b(k))$$
- En général : $d \ll n$

Paramètres :
$P_0, Pl_0, L_0, h_0, h_1, \dots, k$
Inconnues :
$P_1, P_2, \dots, P_5, S_0, \dots, S_{11}$
Termes :
$S_0 = sphere(P_0, h_0)$
$P_2 = interPLS(Pl_0, L_0, S_0)$
...
$S_3 = sphere(P_0, k)$
$S_4 = sphere(P_1, h_3)$
$S_5 = sphere(P_2, h_4)$
$P_3 = interSSS(S_3, S_4, S_5)$
...
$P_5 = interSSS(S_9, S_{10}, S_{11})$

$F_s(P_5, P_2) = distance(P_5, P_3) - h_{11}$

Reparamétrisation

Phase numérique : très difficile

Pour quelles valeurs de k les contraintes supprimées sont-elles satisfaites par $Cp^b(k)$?

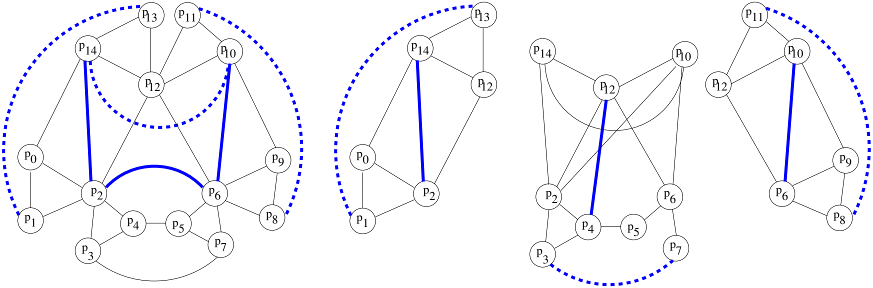
- multi-fonction numérique : $F_r : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$
$$k \mapsto \begin{cases} F_s(Cp^{b_1}(k \quad) \quad) \\ F_s(Cp^{b_2}(k \quad) \quad) \\ \dots \\ F_s(Cp^{b_p}(k \quad) \quad) \end{cases}$$
- En général : $d \ll n$
- Expression analytique de F_r très complexe

Approches proposées :

- échantillonnage de $\mathbb{R}^d$ sur chaque branche
- Newton-Raphson

[Fab06] Arnaud Fabre.
Contraintes géométriques en dimension 3.
PhD thesis, 2006.

Reparamétrisation



[MSI12] P. Mathis, P. Schreck, and R. Imbach.
Decomposition of geometrical constraint systems with reparameterization.
In *Proceedings of the 27th Annual ACM Symposium on Applied Computing*, pages 102–108. ACM, 2012.

Reparamétrisation

Phase numérique :

Pour quelles valeurs de k les contraintes supprimées sont-elles satisfaites par $Cp^b(k)$?

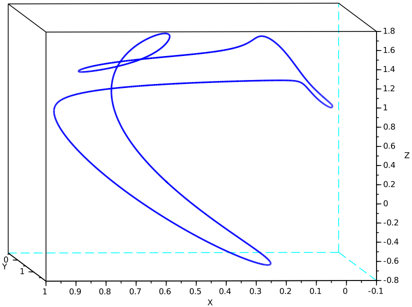
- fonction numérique : $F_r : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$

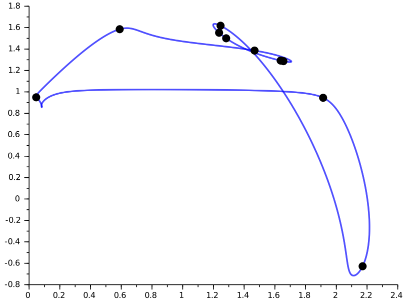
$$k, t \mapsto \begin{cases} F_s(Cp^{b_1}(k,t),t) \\ F_s(Cp^{b_2}(k,t),t) \\ \dots \\ F_s(Cp^{b_p}(k,t),t) \end{cases}$$

- En général : $d \ll n$

Notre approche : Recherche des 0 de la multi-fonction F_r par notre méthode d'homotopie
$\simeq$ Utilisation de la multi-fonction F_r pour "accélérer" notre méthode d'homotopie

Plan de construction et fonction numérique





À un chemin d'homotopie $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ de H correspond une réunion de chemins d'homotopie $\mathcal{S}' \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ de F_r

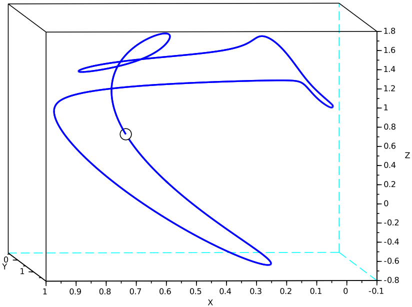
Avec :

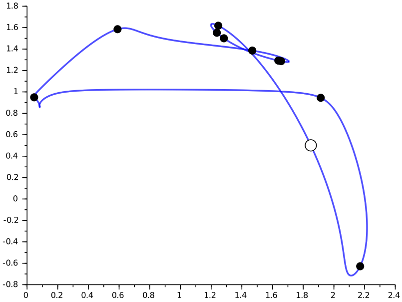
$\forall (x,t) \in \mathcal{S}, \exists b, \exists ! k$ tq $Cp^b(k,t) = x$

et :

$\forall (k,t) \in \mathcal{S}', \exists b\ \exists ! x \in \mathcal{S}$ tq $Cp^b(k,t) = x$

Plan de construction et fonction numérique





À un chemin d'homotopie $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ de H correspond une réunion de chemins d'homotopie $\mathcal{S}' \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ de F_r

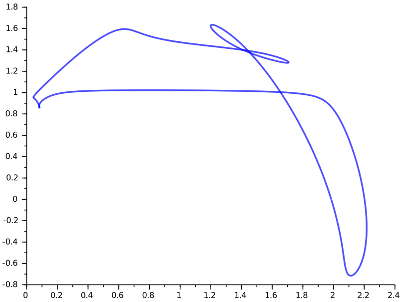
Avec :

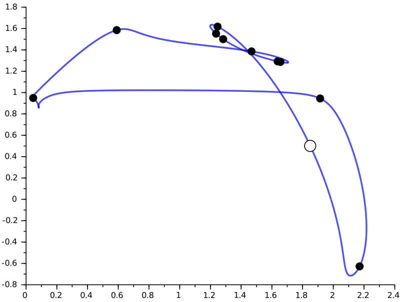
$\forall (x,t) \in \mathcal{S}, \exists b, \exists ! k$ tq $Cp^b(k,t) = x$

et :

$\forall (k,t) \in \mathcal{S}', \exists b \; \exists ! x \in \mathcal{S}$ tq $Cp^b(k,t) = x$

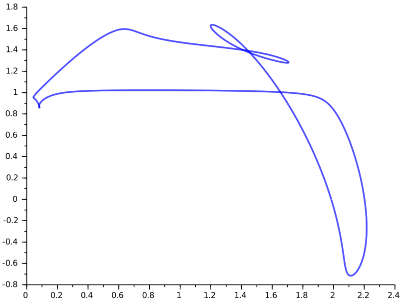
Plan de construction et fonction numérique

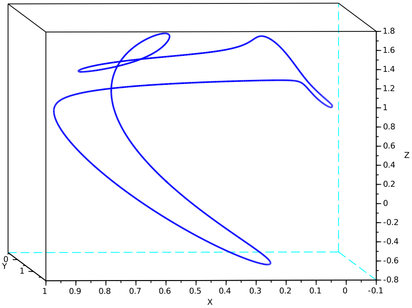




À un chemin d'homotopie $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ de H correspond une réunion de chemins d'homotopie $\mathcal{S}' \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ de F_r
Avec :
$\forall (x,t) \in \mathcal{S}, \exists b, \exists ! k$ tq $Cp^b(k,t) = x$
et :
$\forall (k,t) \in \mathcal{S}', \exists b \; \exists ! x \in \mathcal{S}$ tq $Cp^b(k,t) = x$

Plan de construction et fonction numérique





À un chemin d'homotopie $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ de H correspond une réunion de chemins d'homotopie $\mathcal{S}' \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ de F_r

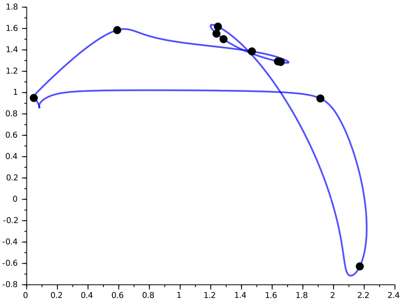
Avec :

$\forall (x, t) \in \mathcal{S}$, $\exists b$, $\exists ! k$ tq $Cp^b(k, t) = x$

et :

$\forall (k, t) \in \mathcal{S}'$, $\exists b$ $\exists ! x \in \mathcal{S}$ tq $Cp^b(k, t) = x$

Plan de construction et fonction numérique



À un chemin d'homotopie $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ de H correspond une réunion de chemins d'homotopie $\mathcal{S}' \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ de F_r

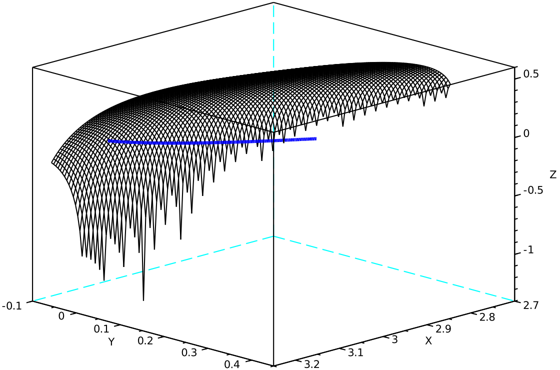
Avec :

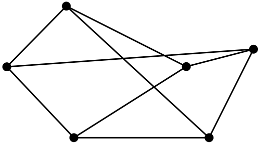
$\forall (x,t) \in \mathcal{S}, \exists b, \exists ! k$ tq $Cp^b(k,t) = x$

et :

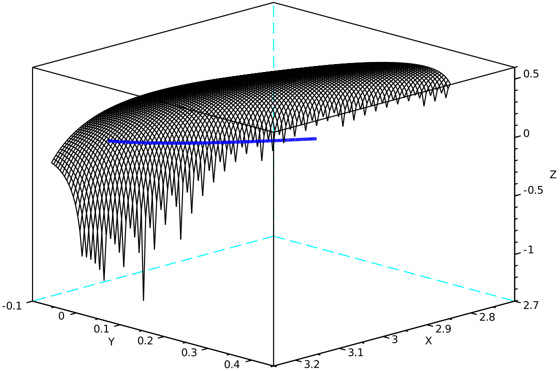
$\forall (k,t) \in \mathcal{S}', \exists b \; \exists ! x \in \mathcal{S}$ tq $Cp^b(k,t) = x$

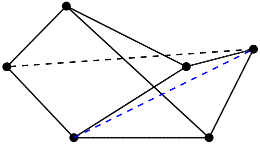
Domaine de définition et changements de branche





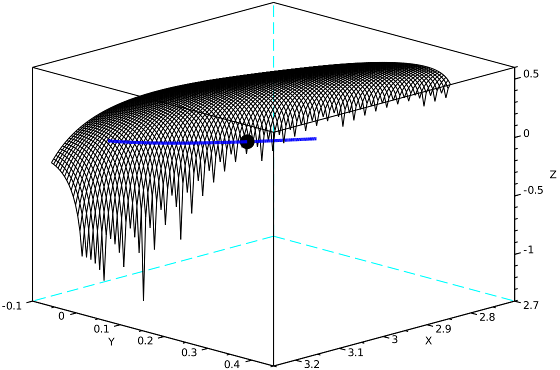
Domaine de définition et changements de branche

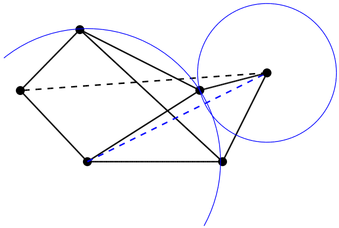




Paramètres :
$p_0, l_0, d_0, \ldots, k$
Inconnues
$c_0, p_1, \ldots, p_2$
Termes :
$\ldots$
$p_5 = intercc(c_5, c_8)$
$c_4 = mkcircle(p_5, d_4)$
$c_7 = mkcircle(p_1, d_7)$
$p_4 = intercc(c_4, c_7)$
$c_3 = mkcircle(p_4, d_3)$
$\ldots$

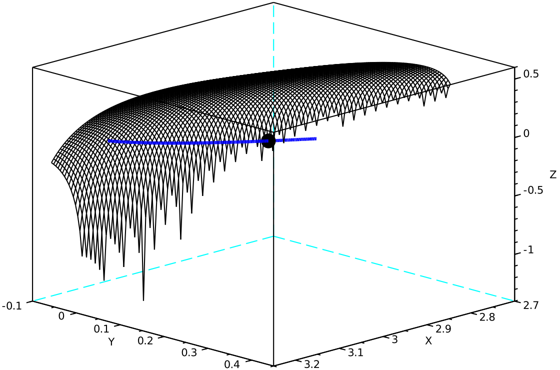
Domaine de définition et changements de branche

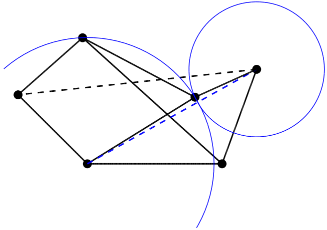




Paramètres :
$p_0, l_0, d_0, \ldots, k$
Inconnues
$c_0, p_1, \ldots, p_2$
Termes :
...
$p_5 = intercc(c_5, c_8)$
$c_4 = mkcircle(p_5, d_4)$
$c_7 = mkcircle(p_1, d_7)$
$p_4 = intercc(c_4, c_7)$
$c_3 = mkcircle(p_4, d_3)$
...

Domaine de définition et changements de branche





Paramètres :

$p_0, l_0, d_0, \ldots, k$

Inconnues

$c_0, p_1, \ldots, p_2$

Termes :

$\ldots$

$p_5 = intercc(c_5, c_8)$

$c_4 = mkcircle(p_5, d_4)$

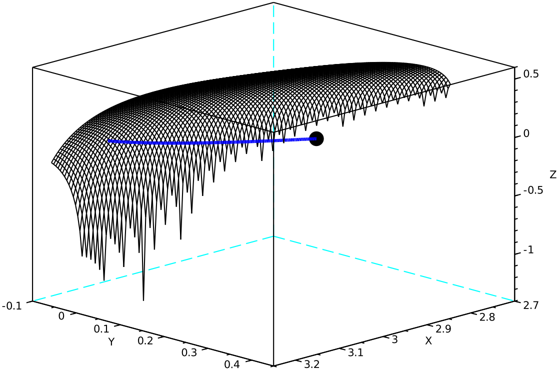
$c_7 = mkcircle(p_1, d_7)$

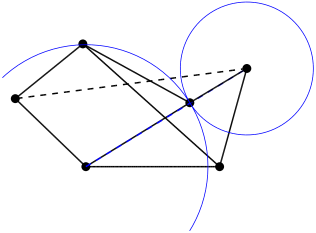
$p_4 = intercc(c_4, c_7)$

$c_3 = mkcircle(p_4, d_3)$

$\ldots$

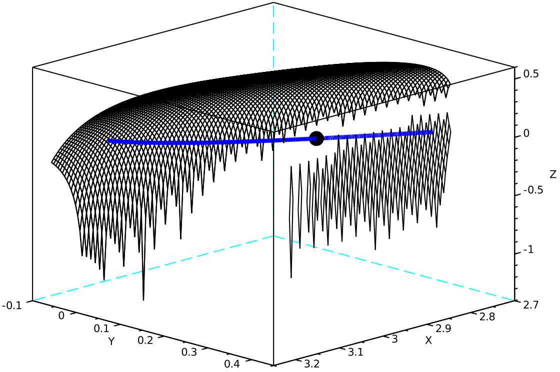
Domaine de définition et changements de branche

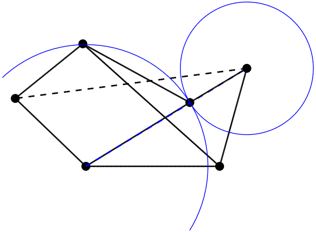




Paramètres :
$p_0, l_0, d_0, \ldots, k$
Inconnues
$c_0, p_1, \ldots, p_2$
Termes :
$\ldots$
$p_5 = intercc(c_5, c_8)$
$c_4 = mkcircle(p_5, d_4)$
$c_7 = mkcircle(p_1, d_7)$
$p_4 = intercc(c_4, c_7)$
$c_3 = mkcircle(p_4, d_3)$
$\ldots$

Domaine de définition et changements de branche





Paramètres :

$p_0, l_0, d_0, \ldots, k$

Inconnues

$c_0, p_1, \ldots, p_2$

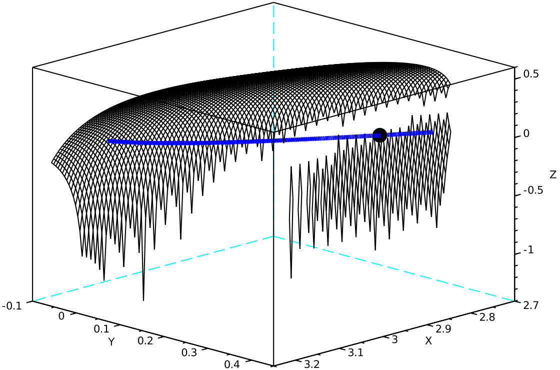
Termes :

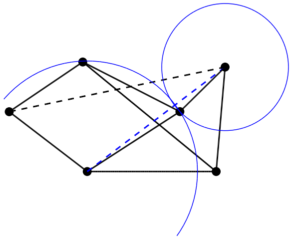
...

$p_5 = intercc(c_5, c_8)$
$c_4 = mkcircle(p_5, d_4)$
$c_7 = mkcircle(p_1, d_7)$
$p_4 = intercc(c_4, c_7)$
$c_3 = mkcircle(p_4, d_3)$

...

Domaine de définition et changements de branche

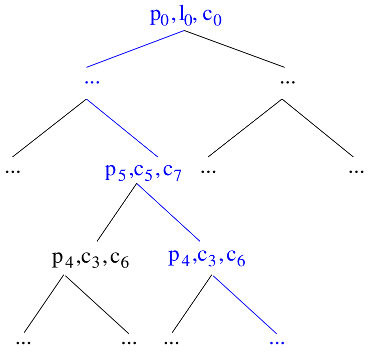




Paramètres :
$p_0, l_0, d_0, \ldots, k$
Inconnues
$c_0, p_1, \ldots, p_2$
Termes :
...
$p_5 = intercc(c_5, c_8)$
$c_4 = mkcircle(p_5, d_4)$
$c_7 = mkcircle(p_1, d_7)$
$p_4 = intercc(c_4, c_7)$
$c_3 = mkcircle(p_4, d_3)$
...

Domaine de définition et changements de branche

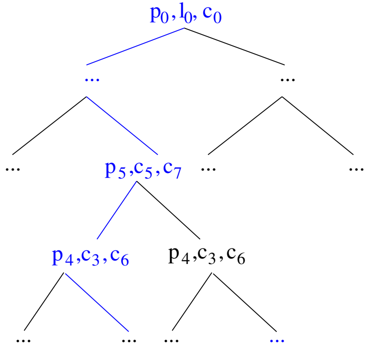
- Identification de la nouvelle branche à suivre



Paramètres :
$p_0, l_0, d_0, \ldots, k$
Inconnues
$c_0, p_1, \ldots, p_2$
Termes :
$\ldots$
$p_5 = intercc(c_5, c_8)$
$c_4 = mkcircle(p_5, d_4)$
$c_7 = mkcircle(p_1, d_7)$
$p_4 = intercc(c_4, c_7)$
$c_3 = mkcircle(p_4, d_3)$
$\ldots$

Domaine de définition et changements de branche

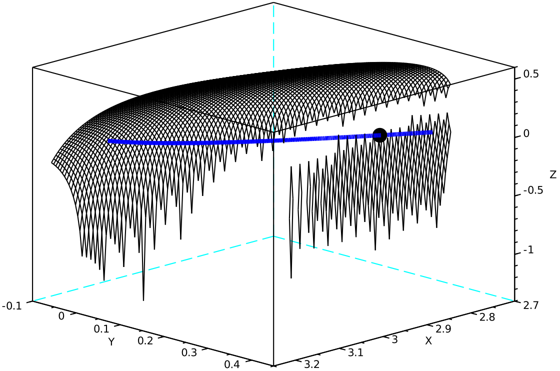
- Identification de la nouvelle branche à suivre



Paramètres :
$p_0\,, l_0\,, d_0\,, \dots, k$
Inconnues
$c_0\,, p_1\,, \dots, p_2$
Termes :
$\dots$
$p_5 = intercc(c_5\,, c_8)$
$c_4 = mkcircle(p_5\,, d_4)$
$c_7 = mkcircle(p_1\,, d_7)$
$p_4 = intercc(c_4\,, c_7)$
$c_3 = mkcircle(p_4\,, d_3)$
$\dots$

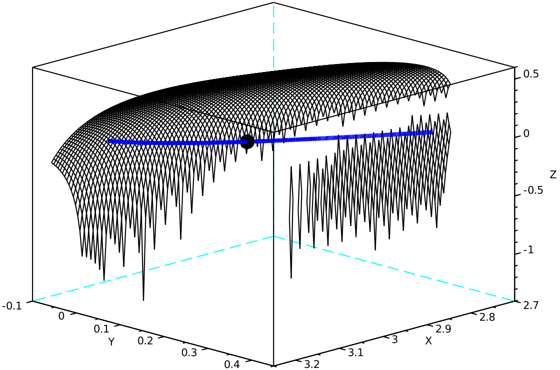
Domaine de définition et changements de branche

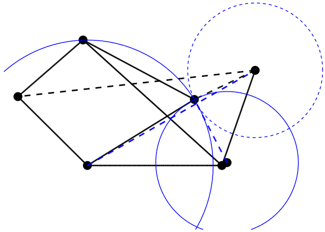
- Identification de la nouvelle branche à suivre
- Suivi du chemin d'homotopie : calcul numérique difficile



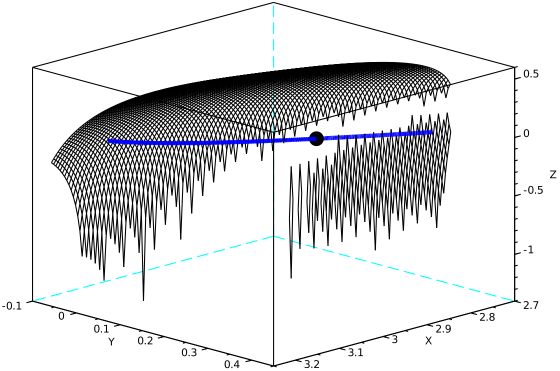
Paramètres :
$p_0, l_0, d_0, \ldots, k$
Inconnues
$c_0, p_1, \ldots, p_2$
Termes :
$\ldots$
$p_5 = intercc(c_5, c_8)$
$c_4 = mkcircle(p_5, d_4)$
$c_7 = mkcircle(p_1, d_7)$
$p_4 = intercc(c_4, c_7)$
$c_3 = mkcircle(p_4, d_3)$
$\ldots$

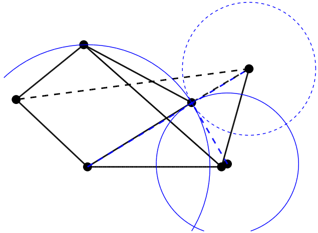
Modifier le plan de construction



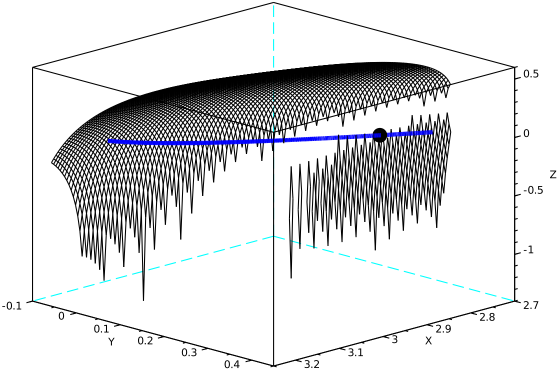


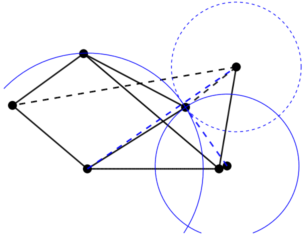
Modifier le plan de construction



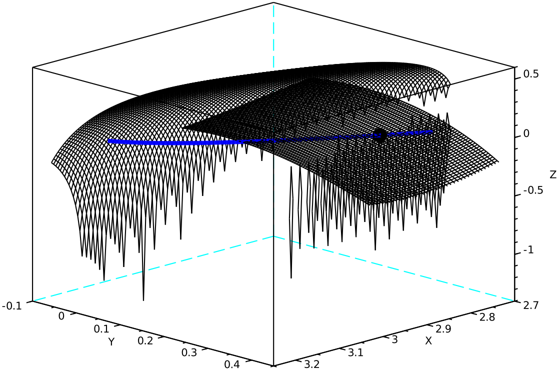


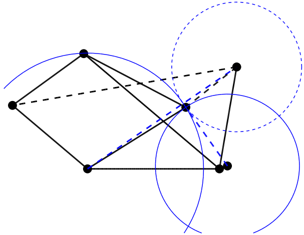
Modifier le plan de construction



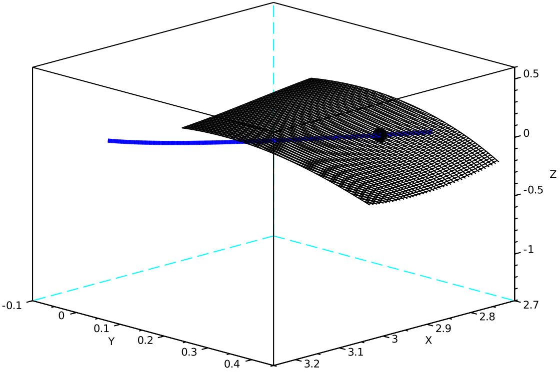


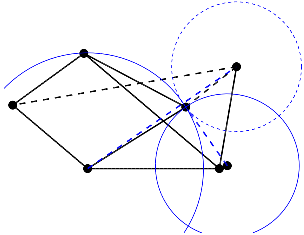
Modifier le plan de construction





Modifier le plan de construction





Paramètres :
$p_0, l_0, d_0, \ldots, k_0, pAdd, k_1$
Inconnues
$c_0, p_1, \ldots, p_2$
Termes :
$\ldots$
$p_5 = intercc(c_5, c_8)$
$c_4 = mkcircle(pAdd, k_1)$
$c_7 = mkcircle(p_1, d_7)$
$p_4 = intercc(c_4, c_7)$
$c_3 = mkcircle(p_4, d_3)$
$\ldots$
$F_0(P_5, P_2) = distance(P_5, P_2) - d_9$
$F_1(P_5, P_4) = distance(P_5, P_4) - d_4$

Algorithme de Suivi de chemins

Esquisse X_{sk}
Fonction numérique F obtenue par reparam., branche de X_{sk}
Figure $X = X_{sk}$

1. Suivre $F^{-1}(0)$ depuis X jusqu'à ce que :
    - le chemin sorte du domaine de définition de F
    - le chemin passe par X_{sk}

   $X =$ dernière figure construite
2. Modifier le plan de construction et F :
    - Identifier l'intersection critique
    - Modifier le PC en conséquence
    - Ajouter une nouvelle contrainte à rattraper
    - Trouver la branche de X
3. Reprendre à 1.

Algorithme de Suivi de chemins

Esquisse X_{sk}
Fonction numérique F obtenue par reparam., branche de X_{sk}
Figure $X = X_{sk}$

1. Suivre $F^{-1}(0)$ depuis X jusqu'à ce que :
   - le chemin sorte du domaine de définition de F
   - le chemin passe par X_{sk}

   $X =$ dernière figure construite
2. Modifier le plan de construction et F :
   - Identifier l'intersection critique
   - Modifier le PC en conséquence
   - Ajouter une nouvelle contrainte à rattraper
   - Trouver la branche de X

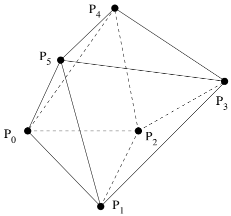
   Retirer les contraintes précédemment ajoutées en fonction d'un critère géométrique
3. Reprendre à 1.

Résultats

Pas de prédiction :

- constant
- meilleur

Table : Temps d'exécution [3].



	Système d'équations	Plan de construction
Octaèdre :		
temps	$\simeq$ 0.5s	$\simeq$ 0.09s
nb d'itérations	1652	797
Icosaèdre :		
temps	$\simeq$ 7.1s	$\simeq$ 5.6s
nb d'itérations	3216	12867

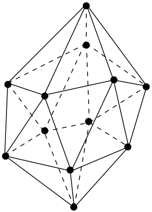
3. sur `Intel(R) Core(TM) i5 CPU 750 @ 2.67GHz`

Résultats

Pas de prédiction :

- constant
- meilleur

Table : Temps d'exécution [3].



	Système d'équations	Plan de construction
Octaèdre :		
temps	$\simeq$ 0.5s	$\simeq$ 0.09s
nb d'itérations	1652	797
Icosaèdre :		
temps	$\simeq$ 7.1s	$\simeq$ 5.6s
nb d'itérations	3216	12867

3. sur `Intel(R) Core(TM) i5 CPU 750 @ 2.67GHz`

Résumé

- Méthode de suivi de chemins d'homotopie guidé par la géométrie...
- pour résoudre des systèmes de contraintes géométriques.
- utilisation d'un plan de construction obtenu par reparamétrisation
- modifié pendant le suivi pour :
  - éviter de gérer la nature multi-fonctionelle du PC
  - éviter de faire du calcul numérique sur une fonction mal "conditionnée".

Perspectives

- Travail en cours !
- Critère géométrique pour la suppression des contraintes ajoutées
- Mesure de comparaison des résultats
- Critère géométrique pour adapter le pas de prédiction pendant le suivi
- ...

Merci de votre attention